Введение в математическую логику
Филипп Дудчук, Денис Паперно
`http : //seminars.narod.ru/fall2005`

Урок 7
22.11.2005

Язык логики предикатов первого порядка

1 Функции и предикаты

Пусть M — непустое множество, а множество M^k состоит из всех кортежей из элементов множества M длины k: $\langle m_1, \ldots, m_k \rangle$.

Будем называть *k-местной функцией на M* любое отображение $M^k \to M$, определенное на всем M^k.

$\boxed{1}$ Является ли функцией f в смысле этого определения, функция, которую изучают в школе $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $x \mapsto x^2$?

Будем также называть *k-местным предикатом на M* любое отображение $M^k \to TV$, где $TV = \{1, 0\}$ — множество истинностных значений. Неформально говоря, предикат — это имя свойства (если это одноместный предикат), бинарного отношения (для двухместного предиката), тернарного отношения (для трехместного) и т. д. Имена элементов, участвующих в соответствующем свойстве/отношении, будем называть аргументами предиката. *Валентностью* предиката называется количество аргументов при предикате. В том же смысле можно говорить о валентности функции.

Пример одноместного предиката на множестве $\mathbb{N}$: ЧЕТНЫЙ(x). Этот предикат истинен на всех четных натуральных числах (т. е. ставит в соответствие четным числам 1 из множества TV) и ложен на всех остальных натуральных числах (т. е. ставит им в соответствие 0). Сконструировать пример одноместного предиката на множестве, скажем, людей теперь не представляет труда. Рассмотрите, например, предикат МУЖЧИНА(x).

Пример двухметного предиката на множестве $\mathbb{N}$: ДЕЛИТЕЛЬ(x, y) — этот предикат истинен на всех парах $\langle x, y \rangle$, для которых верно, что y делится на x без остатка. А предикат ОСТАТОК(x, y, z) — трехместный предикат: он истинен на тройках $\langle x, y, z \rangle$, таких что x делится на y с остатком z.

Мы также будем рассматривать 0-местные функции и предикаты. Любая 0-местная функция есть константа. Пример 0-местной функции — число π.

$\boxed{2}$ Сколько возможных предикатов может быть определено на n-элементном множестве?

$\boxed{3}$ Сколько существует 0-местных предикатов и 0-местных функций на n-элементном множестве?

2 Синтаксис языка предикатов первого порядка

Функции и предикаты в математической записи обозначаются соответственно *функциональными* и *предикатными символами*. Произвольный набор предикатных и функциональных символов будем называть *сигнатурой формального языка*.

Будем также рассматривать бесконечное множество V индивидных переменных — символов, которые могут принимать значения из некоторого множества C, множества индивидных констант.

Теперь определим *терм* языка логики предикатов первого порядка.

1. Всякая индивидная переменная есть терм.
2. Всякий функциональный символ валентности 0 есть терм.
3. Если $t_1, \ldots, t_k$ — термы, а f — функциональный символ валентности $k > 0$, то $f(t_1, \ldots, t_k)$ есть терм.

Теперь мы можем определить, что есть *атомарная формула* языка предикатов первого порядка.

Если P — предикатный символ валентности k, а $t_1, \ldots, t_k$ — термы, то выражение $A(t_1, \ldots, t_k)$ есть атомная формула.

Наконец, определим, что является *формулой* языка предикатов первого порядка.

1. Атомная формула есть формула.
2. Если ϕ — формула, то $\neg\phi$ — формула.
3. Если ϕ и ψ — формулы, то выражения $(\phi \wedge \psi)$, $(\phi \vee \psi)$, $(\phi \to \psi)$ — формулы.
4. Если ϕ — формула, а ξ — индивидная переменная, то выражения $\forall\xi(\phi)$ и $\exists\xi(\phi)$ — формулы.

Мы также будем включать в сигнатуру двухместных предикатный символ $=$, обознающий равенство.

Как можно заметить, логические связки из алфавита языка логики высказываний перешли в алфавит языка логики предикатов первого порядка. Появилось ровно два новых символа — $\forall$ и $\exists$. Эти символы называются кванторами. Символ $\forall$ называется *квантором всеобщности* и соответствует выражениям русского языка типа "для всех ...", "какой ... ни возьми, верно, что ..."и др. Символ $\exists$ называется *квантором существования* и соответствует выражениям русского языка типа "существует ...", "для некоторого ... верно, что ..."и др. Например, формула $\forall x(student(x) \to walk(x))$ соответствует высказыванию английского языка *Every student walks*, а формула $\exists x(student(x) \wedge walk(x))$ — высказыванию *A student walks*.

Сферой действия квантора $\forall$ *или* $\exists$ в формуле ϕ называется подформула ψ формулы ϕ, находящаяся в формуле ϕ с восстановленными скобками в следующем контексте: $\ldots\forall x(\phi)\ldots$ или $\ldots\exists x(\phi)\ldots$

Кванторы являются *связывающими операторами.* При кванторе всегда стоит переменная, по которой происходит квантификация. Все вхождения этой переменной, находящиеся в сфере действия квантора, называются *связанными вхождениями* этой переменной. Вхождение переменной в формулу называется свободным, если это вхождение не находится в сфере действия какого-либо квантора по этой переменной.

Законы отрицания кванторов
$\neg(\exists x(\phi)) \sim \forall x(\neg\phi)$
$\neg(\forall x(\phi)) \sim \exists x(\neg\phi)$

$\boxed{4}$ Чему, по этим законам, будут эквивалентны формулы $\neg(\exists x(\neg\phi))$ и $\neg(\forall x(\neg\phi))$?
$\boxed{5}$ Имеют ли смысл формулы $\exists x(3=5)$, $\exists y(9=\sqrt{81})$ и $\forall z(1)$? Если да, истинны они или ложны? Разберите каждый случай в отдельности.

3 Языки, конструируемые на базе языка логики предикатов первого порядка

Введем в сигнатуру языка логики предикатов первого порядка символ $\in$, понимаемый в обычном смысле, т.е. обозначающий отношение между элементом и множеством, которому он принадлежит. Тогда мы получим язык теории множеств. На этом языке можно записывать утверждения о множествах — например, аксиомы системы ZF. Вот одна из этих аксиом, называемая аксиомой экстенсиональности, или объемности.

$$\forall x\forall y((\forall z((z\in x)\rightarrow(z\in y))\wedge\forall z((z\in y)\rightarrow(z\in x)))\rightarrow(x=y))$$

$\boxed{6}$ Сформулируйте эту аксиому словами.

Другая аксиома ZF — аксиома фундирования (регулярности):
У всякого множества есть минимальный (с точки зрения отношения $\in$) элемент, т. е. элемент, не пересекающийся с самим множеством.

$\boxed{7}$ Запишите эту аксиому на языка теории множеств.