Введение в математическую логику
Филипп Дудчук, Денис Паперно
`http : //seminars.narod.ru/fall2005`

Урок 5
16.11.2005

Окончание урока 3

1 Отношение эквивалентности и разбиение

1. Если множество A разбито в объединение непересекающихся подмножеств, то отношение "находиться в одном подмножестве"является *отношением эквивалентности*.

2. Всякое отношение эквивалентности получается таким способом из некоторого разбиения.

Запись отношений. Обычно вместо $\langle a, b\rangle \in C$ пишут aCb.

Задачи

$\boxed{1}$ Покажите, что требования симметричности и транзитивности можно заменить одним: xRz и $yRz \Rightarrow xRy$ (при сохранении требования рефлексивности).

$\boxed{2}$ Сколько различных отношений эквивалентности существует на множестве $\{1, 2, 3, 4\}$?

$\boxed{3}$ На множестве задано два отношения эквивалентности A и B. Будет ли их пересечение отношением эквивалентности? Если да, то сколько у него будет классов эквивалентности? Что можно сказать про объединение отношений?

Функция и ее график. Функция сопоставляет элементам множества элементы множества . *График функции* f — множество пар вида $\langle a, f(a)\rangle$. В математике функцию отождествляют с ее графиком.

Определение. Функция из A в B (пишут: $A \to B$) — такое отношение $C \subseteq A \times B$, что $\langle a, b\rangle \in C$ и $\langle a, c\rangle \in C \Rightarrow b = c$.

Область определения функции $C \subseteq A \times B$ — множество $\{\ a \in A \mid \langle a, c\rangle \in C\ \}$.

Истинностные значения — элементы множества $TV = \{$Истина, Ложь$\}$. Так же пишут: $TV = \{T, F\} = \{1, 0\}$

Язык логики высказываний

До сих пор мы занимались практически лишь введением новых понятий, которые должны были пригодиться в будущем. Этот момент наступил, и сегодня мы рассмотрим один из важнейших языков математики — *язык логики высказываний*.

Высказыванием называется повествовательное предложение, для которого имеет смысл говорить о его истинности или ложности. Так, например, предложения русского языка *Вася — студент*, *Сегодня идет дождь*, *Все черепахи двигаются со скоростью света* являются высказываниями. Напротив, предложения *Сегодня пойдет дождь?*, *Нынешний король Франции лыс*, ‖ *На странице 2 хэндаута между символами* "‖"*написана ложь* ‖, так как определить, истинны или ложны эти предложения, невозможно.

Для формализации понятия истинности и ложности высказывания вводится понятие *истинностного значения* высказывания. Если высказывание A истинно, будем говорить, что его истинностное значение равно 1. Если высказывание A ложно, будем говорить, что его истинностное значение равно 0.

2 Алфавит, слово, синтаксис

Формальный язык (в том числе язык логики высказываний) — множество *слов* в некотором *алфавите*.

Определение 1. *Алфавит* — некоторое конечное множество. Элементы алфавита часто называют *буквами*, или *символами* данного алфавита. Последовательности символов, в которые не входят никакие символы, кроме символов данного алфавита, называются *словами* в данном алфавите. Пустое слово ϵ (слово, не содержащее ни одного символа) есть слово в любом алфавите.

$\boxed{4}$ Например, зафиксируем некоторый алфавит $\Sigma = \{a, b, c\}$. Множество всех слов в алфавите Σ будем обозначать Σ^*. Тогда последовательности *bbabcca*, *abba*, *c* будут словами в алфавите Σ, а последовательности *bbabcda*, ♣♢♡♠, *dz* — не будут. Более коротко — $\{bbabcca, abba, c\} \subset \Sigma^*$, а $\{bbabcda$, ♣♢♡♠, $dz\} \not\subset \Sigma^*$.

$\boxed{5}$ Аналогичный пример из фрагмента русского языка. Зафиксируем алфавит {л, м, о} и будем строить слова в этом алфавите. Их получится, разумеется, бесконечное количество:

ϵ		
л	м	о
лл	лм	ло
мл	мм	мо
ол	ом	оо
ллл	ллм	лло
лмл	лмм	лмо
лол	*лом*	лоо
млл	млм	мло
ммл	ммм	ммо
мол	мом	моо
...		

Однако лишь немногие из них будут словами русского языка (из тех, что приведены выше, слова русского языка выделены курсивом). Это означает, что для описания некоторого языка одного алфавита мало, требуются еще некоторые правила составления слов, или *синтаксис* этого языка. Как это можно сделать, будет продемонстрировано в разделе 3.

В общем случае для определения формального языка достаточно определить алфавит и синтаксис. Однако при определении формального языка математики необходимо ввести *интерпретацию*, или *семантику* для данного языка. Семантику языка логики высказывания, как и синтаксис, мы вводим в разделе 4.

3 Алфавит языка логики высказываний

Зафиксируем алфавит σ логики высказываний.

$$\sigma = \{P, \neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, (,)\}$$

Слова вида (P), (PP), (PPP) и т. д. будем называть *пропозициональными переменными.* Обозначим эти слова P_1, P_2, P_3 и т. д. соответственно. Сразу же договоримся писать A вместо P_1, B вместо P_2, C вместо P_3.

Символы $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ будем называть логическими связками. Их названия: $\neg$ — *отрицание*, $\wedge$ — *конъюнкция*, $\vee$ — *дизъюнкция*, $\rightarrow$ — *импликация*, $\leftrightarrow$ — *эквиваленция.*

4 Синтаксис языка логики высказываний

Как уже указывалось выше, язык логики высказываний, как и любой формальный язык есть множество слов. В нашем случае это множество слов в алфавите σ. Условимся для языков математики говорить не *слова*, а *формулы*, а также *правильно построенная формула* вместо *слово в данном языке.*

4.1 Индукция по построению формул

Правила построения формул в языке логики высказываний строятся индуктивно следующим образом.

1. Всякая пропозициональная переменная есть формула.
2. Если A и B — формулы, то $(\neg A)$, $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \rightarrow B)$ и $(A \leftrightarrow B)$ есть формулы.

Будем называть формулы в языке логики высказываний *пропозициональными формулами.*

Так, например, последовательность $\wedge A(\leftrightarrow \neg B()B$ не является пропозициональной формулой, а последовательность $(((\neg A) \rightarrow (A \wedge C)) \vee (C \leftrightarrow B))$ является пропозициональной формулой.

4.2 Соглашения о скобках

Внешние скобки пропозициональной формулы восстанавливаются однозначно, поэтому их можно опускать. Также можно опускать скобки в формуле, имея в виду, что отрицание связывает сильнее, чем конъюнкция, конъюнкция связывает сильнее, чем дизъюнкция, дизъюнкция связывается сильнее, чем импликация, а импликация — сильнее, чем эквиваленция. Поэтому в формуле $\neg A \to A \wedge C \vee C \leftrightarrow B$ скобки однозначно восстанавливаются следующим образом: $((\neg A) \to ((A \wedge C) \vee C)) \leftrightarrow B$.

5 Семантика языка логики высказываний

5.1 Оценка

Истинностное значение высказывания, обозначаемого правильно построенной формулой языка логики высказываний, т. е. составленного по правилам построения формул из пропозициональных переменных и логических связок, зависит только от истинностных значений входящих в это высказывание пропозициональных переменных.

Пусть $V = \{A, B, C, \ldots\}$ — множество всех пропозициональных переменных. *Оценкой* (evaluator) будем называть функцию $g : V \mapsto \{1, 0\}$. Иными словами, функция g всякому высказыванию ставит в соответствие истинностное значение — 1, если высказывание истинно, и 0, если ложно.

5.2 Смысл логических связок, таблицы истинности

Определим смысл логических связок.

$g(\neg A) = f_\neg(g(A))$
$g(A\lambda B) = f_\lambda(g(A), g(B))$, где λ — одна из связок $\wedge, \vee, \to, \leftrightarrow$.

Тогда требуется определить смысл функций $f_\neg, f_\wedge, f_\vee, f_\to, f_\leftrightarrow$. Это легко сделать при помощи *истинностных таблиц.*

Пусть требуется построить истинностную таблицу для формулы A. Зафиксируем множество $\{P_1, \ldots, P_n\}$ всех пропозициональных переменных, входящих в A. Тогда таблицей истинности для формулы A называется таблица следующего вида:

P_1	$\ldots$	P_n	A
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
α_1	$\ldots$	α_n	α
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$

Заговок таблицы состоит из перечисления входящих в формулу пропозициональных переменных и записи самой формулы, а также 2^n строк, в которых выписаны все различные комбинации нулей и единиц, соответствующих всем возможным комбинациям истинностных значений пропозициональных переменных, входящих в формулу. Последний столбец содержит истинностные значения $\alpha \in \{1, 0\}$ всей формулы A.

Тогда придадим семантику логическим связкам.

1. *Отрицание* $\neg A$ формулы A истинно, титтк A ложно.

2. *Конъюнкция* $A \wedge B$ формул A и B истинна, титтк A и B истинны.

3. *Дизъюнкция* $A \vee B$ формул A и B истинна, титтк хотя бы одно из формул A и B истинна.

4. *Импликация* $A \to B$ формул A и B ложна, титтк A истинно, а B ложно. В остальных случаях импликация $A \to B$ истинна.

5. *Эквиваленция* $A \leftrightarrow B$ формул A и B истинна, титтк истинностные значения A и B (т. е. либо A и B одновременно истинны, либо одновременно ложны.

Ниже приводятся истинностные таблицы для всех логических связок.

	A	$\neg A$
	0	1
	1	0
A	B	$A \wedge B$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1
A	B	$A \vee B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1
A	B	$A \to B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1
A	B	$A \leftrightarrow B$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

5.3 Тавтологии и противоречия

Тавтология — высказывание, истинное при любых истинностных значениях переменных, входящих в него.

$\boxed{6}$ Например, $A \to A$ является тавтологией. Докажите это.

Противоречие — высказывание, ложное при любых значениях переменных, входящих в него.

$\boxed{7}$ Например, $A \wedge \neg A$ является противоречием. Докажите это.

Тавтологии также иногда называются *тождественно истинными высказываниями*, а противоречия — *тождественно ложными*.

Легко заметить, что отрицание любой тавтологии дает противоречие, а отрицание любого противоречия дает тавтологию.

5.4 Эквивалентность высказываний

Два высказывания A и B называются эквивалентными, если эквиваленция $A \leftrightarrow B$ тождественно истинна.

6 Домашнее задание

1. При каких P, Q и R истинны пропозициональные формулы:

   (a) $P \wedge (Q \vee \neg P) \wedge ((\neg Q \to P) \vee Q)$

   (b) $(P \to (Q \to R)) \to ((P \to Q) \to (P \to R))$

2. Доказать, что формула

$$((P \to Q) \to P) \to P$$

   является тавтологией.

3. Доказать, что формула

$$((P \to Q \wedge R) \to (\neg Q \to \neg P)) \to \neg Q$$

   не является тавтологией.

4. Проверить эквивалентность расстановки скобок в следующих формулах:

   (a) $(\neg A \wedge B) \to (C \to A)$

   (b) $((\neg A \wedge B) \to C) \to A$