Введение в математическую логику
Урок 3
25.10.2005

Филипп Дудчук, Денис Паперно
Сайт семинаров: http://seminars.narod.ru/fall2005

Отношения, функции, предикаты

Что такое упорядоченная пара? Это способ из двух объектов x и y сконструировать один $\langle x,y\rangle$, так что
Свойство. $\langle x,y\rangle=\langle x',y'\rangle \Leftrightarrow x=x'$ и $y=y'$

Такой способ (и даже не один!) можно указать через множества.

Упорядоченная пара по Куратовскому. Упорядоченной парой по Куратовскому называется $\langle x,y\rangle=\{\{x\},\{x,y\}\}$

Задача. Доказать, что для упорядоченной пары по Куратовскому выполняется указанное выше свойство.

Упорядоченная пара по Винеру
$\langle x,y\rangle=\{\{\varnothing,x\},\{\{y\}\}\}$

Задача. Доказать, что для упорядоченной пары по Винеру выполняется указанное выше свойство.

Кортеж – способ из нескольких объектов сконструировать один, так что
Свойство. $\langle x_1,x_2,\ldots,x_n\rangle=\langle x'_1,x'_2,\ldots x'_n\rangle \Leftrightarrow x_1=x'_1, x_2=x'_2,\ldots x_n=x'_n$

Пример такого способа:
$\langle x_1,x_2,\ldots,x_n\rangle=\{\langle 1,x_1\rangle,\langle 2,x_2\rangle,\ldots,\langle n,x_n\rangle\}$

Задача. Переформулируйте этот способ в терминах множеств (без упоминания натуральных чисел)

Определение. Декартово произведение множеств A и B – множество
$A\times B=\{\langle a,b\rangle | a\in A$ и $b\in B\}$

Отношением между множествами A и B называется множество C такое, что $C\subseteq A\times B$

Бинарным отношением на множестве A называется множество C такое, что $C\subseteq A\times A$

Свойства бинарного отношения C на множестве A:
- рефлексивно, если для любого $a\in A$ $\langle a,a\rangle\in C$
- симметрично, если для любых $a,b\in A$ $\langle a,b\rangle\in C \Rightarrow \langle b,a\rangle\in C$
- антисимметрично, если для любых $a,b\in A$ $\langle a,b\rangle\in C$ и $\langle b,a\rangle\in C \Rightarrow a=b$
- транзитивно, если для любых $a,b,c\in A$ $\langle a,b\rangle\in C$ и $\langle b,c\rangle\in C \Rightarrow \langle a,c\rangle\in C$

Отношение называется *отношением эквивалентности*, если оно рефлексивно, симметрично и транзитивно.

Отношение называется *отношением частичного порядка*, если оно рефлексивно, антисимметрично и транзитивно.

Отношение частичного порядка, в котором все элементы множества сравнимы (т.е. для любых x и y или xCy, или yCx), называется *линейным порядком*.

Отношение эквивалентности и разбиение.

1) Если множество A разбито в объединение непересекающихся подмножеств, то отношение «находиться в одном подмножестве» является отношением эквивалентности.
2) Всякое отношение эквивалентности получается таким способом из некоторого разбиения.

Запись отношений. Обычно вместо $<a,b>\in C$ пишут aCb.

Задачи.
- Покажите, что требования симметричности и транзитивности можно заменить одним xRz и yRz => xRy (при сохранении требования рефлексивности)
- сколько различных отношений эквивалентности существует на множестве {1,2,3,4}?
- На множестве M задано два отношения эквивалентности A и B. Будет ли их пересечение отношением эквивалентности? если да, то сколько у его будетим классов эквивалентности? Что можно сказать про объединение отношений?

Функция и её график. Функция сопоставляет элементам множества A элементы множества B. *График функции f* – множество пар вида $<a,f(a)>$. В математике функцию отождествляют с её графиком.

Определение. Функция из A в B (пишут: $A\rightarrow B$)– такое отношение $C\subseteq A\times B$, что $<a,b>\in C$ $<a,c>\in C$ => b=c

Область определения функции $C\subseteq A\times B$ – множество таких $a\in A$, что $<a,c>\in C$. Функция не определена на $a\in A$, если нет такого $c\in B$, что $<a,c>\in C$, если

Истинностные значения – элементы множества TV={Истина, Ложь}

Оценочная функция – функция ($Ut\rightarrow TV$), сопоставляющая каждому высказыванию его истинностное значение.

Одноместным предикатом называется функция, сопоставляющая объекту истинностное значение.

Соответствие одноместных предикатов и множеств. Для каждого одноместного предиката существует множество объектов, для которых он даёт значение Истина, и, наоборот, для каждого множества есть предикат, дающий значение Истина только для объектов, входящих в данное множество.

Примеры предикатов. Предикаты, определённые на числах: быть натуральным, быть чётным. Предикаты, определённые на людях: быть мужчиной, иметь 5 детей.

Квантором называется функция, сопоставляющая паре одноместных предикатов истинностное значение.

Примеры кванторов.
Квантор существования сопоставляет паре предикатов <A,B> значение Истина, если есть объект x такой, что A(x)=B(x)=Истина
Квантор общности сопоставляет паре предикатов <A,B> значение Истина, если для любого объекта x, такого что A(x)=Истина, B(x)=Истина
«Большинство» сопоставляет паре предикатов <A,B> значение Истина, если для большинства объектов x, для которых A(x)=Истина, B(x)=Истина
«Ни один» сопоставляет паре предикатов <A,B> значение Истина, если нет такого объекта x, что A(x)=Истина и B(x)=Истина

Обобщённое понятие предиката.
n-местный предикат на множестве A – функция, сопоставляющее n-местному кортежу элементов A истинностное значение.

Примеры: идёт дождь (0-местный), спать (1-местный), любить (2-местный), знать (2-местный), давать (3-местный), запивать (3-местный), продавать (4-местный)