Введение в математическую логику

Филипп Дудчук, Денис Паперно

http://seminars.narod.ru/fall2005

Урок 2

18.10.2005

Теорема Кантора

Целью сегодняшнего занятия является доказательство теоремы Кантора. Начем мы, однако, с изучения операций, которые можно производить над множествами, и с повторения понятия мощности множества.

1. Операции над множествами

Используются следующие операции над множествами.

◇ *Объединение множеств* (обозначается $\cup$)

Объединение множеств A и B ($A \cup B$) содержит элементы, принадлежащие A или B:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ или } x \in B\}$$

◇ *Пересечение* (обозначается $\cap$)

Объединение множеств A и B ($A \cap B$) содержит элементы, принадлежащие A и B одновременно:

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \in B\}$$

◇ *Разность* (обозначается $\backslash$)

Объединение множеств A и B ($A \backslash B$) содержит все элементы, которые принадлежат A, но не пренадлежат B:

$$A \backslash B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \notin B\}$$

◇ *Симметрическая разность* (обозначается $\triangle$)

Симметрическая разность множеств A и B ($A \triangle B$) содержит элементы, которые принадлежат ровно одному из множеств A и B:

$$A \triangle B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A) = (A \cup B) \backslash (A \cap B)$$

$\boxed{\mathbf{1}}$ Существуют ли множества A, B и C такие, что $A \cap B \neq \emptyset$, $A \cap C = \emptyset$ и $(A \cap B) \backslash C = \emptyset$?

Теперь введем понятие *кортежа* из n элементов. До сих пор, говоря о множествах, мы проводили паралель с мешками. Едва ли можно говорить о том, в каком порядке следуют элементы во множестве-мешке. Теперь мы будем говорить также о кортежах — множествах, элементы которых упорядочены друг относительно друга. Такие множества будем называть кортежами, а n-элементный кортеж будем записывать $\langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle$. Двухэлементный кортеж будем называть *упорядоченной парой*, или просто *парой* трехэлементный — тройкой, четырехэлементный — четверкой, n-элементный — энкой. Обратим внимание на следующие факты:

$$\{a, b\} = \{b, a\}$$
$$\langle a, b \rangle \neq \langle b, a \rangle$$

Опеределение 1. *Декартовым произведением* множества A на множество B называется множество

$$A \times B = \{\langle x, y \rangle \mid x \in A \text{ и } y \in B\}$$

2. Мощность множества, равномощные множества

Как мы уже изучали, количество элементов в конечном множестве называется также *мощностью множества*. Мощность множества A будем обозначать $|A|$.

Опеределение 2. Если между элементами двух множеств можно установить *взаимно-однозначное* (тж. одно-однозначное, взаимное однозначное) соответствие, мощности этих множеств равны.

Взаимная однозначность соответствия обеспечивается тогда и только тогда, когда каждому элементу из одного множества соответствует ровно один из другого и наоборот. О множествах, мощности которых равны, также говорят, что они *равномощны*.

$\boxed{\mathbf{2}}$ Каких подмножеств больше у 100-элементного множества — мощности 57 или мощности 43?

Понятие мощности множества и отношение равномощности между множествами можно распространить и на бесконечные множества.

Пример 1. Рассмотрим отрезки $[0, 1]$ и $[0, 2]$. Очевидно, каждый из них является подмножеством действительных чисел и каждый из них состоит, таким образом, из бесконечного числа элементов (покажите это!). Мощности этих отрезков равны, т.к. между ними есть взаимно-однозначное соответствие: каждому элементу $x \in [0, 1]$ поставим в соответствие элемент $y \in [0, 2]$, такой что $y = 2x$. Иными словами, искомое соответствие задается *отображением* $x \mapsto 2x$.

$\boxed{3}$ Доказать, что интервал $(0, 1)$ и луч $\{x \mid x \in \mathbb{R}$ и $x > 0\}$ суть равномощные множества.

Факт. Мощность множества A меньше мощности множества B, титтк A равномощно некоторому подмножеству $B' \subseteq A$ и множество B не равномощно никакому подмножеству множества A. Аналогичное утверждение можно построить и для отношения "больше" между мощностями множеств.

Определение 3. Бесконечное множество A называется *счетным* $\Leftrightarrow$ A равномощно множеству $\mathbb{N}$ натуральных чисел.

Иными словами, A счетно, если оно представимо в виде последовательности $\{x_1, x_2, x_3, \dots\}$, где x_i соответствует натуральному числу i, причем это соответствие взаимно-однозначно, так что все x_i различны.

$\boxed{4}$ Доказать, что множество целых чисел $\mathbb{Z}$ и множество рациональных чисел $\mathbb{Q}$ счетны.

Мощность счетного множества обозначается символом $\aleph_0$ (а́леф нуль). Укажем, что множество действительных чисел $\mathbb{R}$ несчетно.

3. Теорема Кантора, парадокс Кантора

Будем обозначать через $\mathcal{P}(X)$ множество всех подмножеств множества X.

Теорема 1 (Кантора). Никакое множество X не равномощно множеству всех своих подмножеств $\mathcal{P}(X)$.

Доказательство. Предположим обратное: пусть существует множество X, равномощное $\mathcal{P}(X)$. Тогда, по определению 2, между элементами X и $\mathcal{P}(X)$ есть взаимнооднозначное соответствие. Обозначим его φ; φ всякому элементу $x \in X$ ставит в соответствие элемент $\varphi(x) \in \mathcal{P}(X)$. Тогда рассмотрим те элементы $x \in X$, которые не принадлежат соответствующему им подмножеству $\varphi(x)$. Эти элементы формируют множество Z:

$$Z = \{x \in X \mid x \notin \varphi(x)\}$$

Тогда $Z \subset X$. Это означает, что $Z \in \mathcal{P}(X)$ и $Z = \varphi(z)$ для некоторого $z \in X$. Значит,

$$z \notin \varphi(z) \Leftrightarrow z \notin Z$$

Но по построению множества Z,

$$z \notin \varphi(z) \Leftrightarrow z \in Z$$

Выходит, что $z \notin Z \Leftrightarrow z \in Z$. Получили противоречие. $\square$

Нетрудно показать, что мощность множества всегда *строго меньше* мощности множества всех его подмножеств. Рассмотрим снова множество X и множество его подмножеств $\mathcal{P}(X)$. Каждому элементу $x \in X$ поставим в соответствие одноэлементное подмножество $\{x\} \in \mathcal{P}(X)$. Очевидно, что множество X равномощно подмножеству множества $\mathcal{P}(X)$ и обратное неверно.

Приведем также *парадокс Кантора* (1899).
Рассмотрим множество всех мыслимых множеств, назовем его U. Теперь рассмотрим множество всех его подмножеств $\mathcal{P}(U)$. По теореме Кантора, $|U| < |\mathcal{P}(U)|$. Но $\mathcal{P}(U) \subseteq U$, т.к. U состоит из всех мыслимых множеств. Тогда $|U|$ не превосходит мощности $\mathcal{P}(U)$. Получили противоречие.

Парадокс Кантора был разрешен в 1908 году, когда немецкий математик Цермелло предложил *систему аксиом* теории множеств, которая была впоследствии дополнена Френкелем и носит название системы Цирмелло — Френкеля, ZF. В системе ZF парадокс Кантора воспроизвести не удается, т.к. аксиомы ZF подобраны так, что нельзя доказать, что U является множеством.

Дополнительная литература

Верещагин Н. К., Шень А. Х.	Лекции по математической логике и теории алгоритмов. Часть 1. Начала теории множеств. М.: МЦНМО, 1999. [ftp://ftp.mccme.ru/users/shen/logic/sets/]
Плиско В. Е.	Математическая логика: Курс лекций. — [http://lpcs.math.msu.su/ ~ plisko/matlog.pdf]