Введение в математическую логику. **Урок 1: общее понятие о множествах**.

Денис Паперно, Филипп Дудчук.

11 октября 2005 г.

Понятие о множестве (неформальное): всякий набор чего-либо является *множеством*.
Примеры: множество {1,2,3}, {John,Mary}, {a,c,q,r}, {a,b,c,d,e,f,g,h,i,j,k,l,m,n,o,p,q,r,s,t,u,v,w,x,y,z}, множество натуральных чисел $\boldsymbol{N}$, множество чётных чисел, множество простых чисел $\boldsymbol{P}$, множество действительных чисел $\boldsymbol{R}$.

Множества и элементы. Члены множества называются *элементами*. Говорят, что элемент входит в множество, и это обозначается знаком ($\in$). Если элемент не входит в множество, это обозначается знаком ($\notin$).
Примеры. $1\in\{1,2,3\}$, John$\in${John,Mary}, n$\in${a,b,c,d,e,f,g,h,i,j,k,l,m,n,o,p,q,r,s,t,u,v,w,x,y,z}, $3\in\boldsymbol{N}$, f$\notin${1,4,2,d,a,r}, $\pi\notin\boldsymbol{N}$.

Задачи.

1. Старейший математик среди шахматистов и старейший шахматист среди математиков — это один или тот же человек или (возможно) разные?

2. Лучший математик среди шахматистов и лучший шахматист среди математиков — это один или тот же человек или (возможно) разные?

3. Каждый десятый математик — шахматист, а каждый шестой шахматист — математик. Кого больше — математиков или шахматистов — и во сколько раз?

Способы задания множеств. Есть два простых способа задания множеств – перечисление элементов и задание свойства, присущего всем элементам множества и только им.
Пример: одно и то же множество можно задать как «множество чётных натуральных чисел, меньших 5» ({x | x чётное, x$\in$**N** и x<5}), а можно как {2, 4}.

Конечные и бесконечные множества. Множества бывают конечными (такие можно задать перечислением элементов) и бесконечными.
Примеры бесконечных множеств: $\boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{R}$, [0;1] (множество точек на отрезке с концами в точках 0 и 1).

Пустое множество. Частный случай конечного множества – пустое (обозначается $\varnothing$). Оно не содержит ни одного элемента и может быть задано пустым списком.

Подмножества. Если все элементы множества A являются элементами множества B, говорят, что A – подмножество B (записывается: $A\subset B$).
Примеры. $\{5\}\subset\{5\}$, $\{5\}\subset\{2,3,5,7,11\}$, {a}$\subset${a,b,c,d,e,f,g,h,i,j,k,l,m,n,o,p,q,r,s,t,u,v,w,x,y,z}, {b}$\subset${a,b,c,d,e,f,g,h,i,j,k,l,m,n,o,p,q,r,s,t,u,v,w,x,y,z}, {b,d,r}$\subset${a,b,c,d,e,f,g,h,i,j,k,l,m,n,o,p,q,r,s,t,u,v,w,x,y,z}, $\boldsymbol{N}\subset\boldsymbol{R}$, $\{1,2,4,36\}\subset\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{P}\subset\boldsymbol{N}$.

Каждое множество является подмножеством самого себя.
Пустое множество является подмножеством любого множества.
У множества с n элементами 2^n подмножеств.
Задача. Доказать, что это так.
Примеры: у пустого множества – одно подмножество (оно само), у одноэлементного – два (пустое и оно само), у двухэлементного множества – четыре (например, у {a,b} – $\varnothing$, {a}, {b}, {a,b}), и т.д.

Множество всех подмножеств множества A обозначается 2^A.

Равенство множеств. Если $A\subset B$ и $B\subset A$, то A=B.

Задача. Равны ли множества:

{1} и {1}; {2} и {3}; {1,2} и {2,1}; {2,4,5,8,21,23,53} и {2,8,4,5,53,21,23}; {12,4,2,54,9,1,4} и {12,4,3,54,9,1,4}; {a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, o, p, q, r, s, t, u, v, w, x, y, z} и {a, b, c, v, w, i, j, k, d, e, f, g, h, q, r, s, t, u, l, m, n, o, p, x, y, z}; множество нечётных чисел второго десятка и {11,13,15,17,19}; $\varnothing$ и {}; $\varnothing$ и {$\varnothing$}; множество слонов в этой комнате и множество розовых крокодилов.

Операции над множествами. Используются следующие операциями над множествами:

- *Объединение* (обозначается $\cup$). Объединение множеств A и B ($A\cup B$) содержит все элементы, принадлежащие A или B:

$A\cup B=\{x|\ x\in A$ или $x\in B\}$

- *Пересечение* (обозначается $\cap$). Пересечение множеств A и B ($A\cap B$) содержит все элементы, принадлежащие и A, и B одновременно:

$A\cap B=\{x|\ x\in A$ и $x\in B\}$

- *Разность* (обозначается \). Разность множеств A и B ($A\setminus B$) содержит все элементы, принадлежащие A, но не принадлежащие B:

$A\setminus B=\{x|\ x\in A$ и $x\notin B\}$

- *Симметрическая разность* (обозначается Δ). Симметрическая разность A и B ($A\Delta B$) содержит все элементы, принадлежащие A или B, но не A и B одновременно:

$A\Delta B=A\setminus B\cup B\setminus A=(A\cup B)\setminus(A\cap B)$

Задачи.

4. Существуют ли такие множества A, B и C, что $A\cap B\neq\varnothing$, $A\cap C=\varnothing$ и $(A\cap B)\setminus C=\varnothing$?

5. Какие из равенств **(а)** $(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$; **(б)** $(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$; **(в)** $(A\cup B)\setminus C=(A\setminus C)\cup B$; **(г)** $(A\cap B)\setminus C=(A\setminus C)\cap B$; **(д)** $A\setminus(B\cup C)=(A\setminus B)\cap(A\setminus C)$; **(е)** $A\setminus(B\cap C)=(A\setminus B)\cup(A\setminus C)$ верны для любых множеств A, B, C?

6. Проведите подробное доказательство верных равенств предыдущей задачи, исходя из определений. (Докажем, что множества в левой и правой частях равны. Пусть x — любой элемент левой части равенства. Тогда… Поэтому x входит в правую часть. Обратно, пусть…) Приведите контрпримеры к неверным равенствам.

7. Докажите, что симметрическая разность ассоциативна: $A\triangle(B\triangle C)=(A\triangle B)\triangle C$ для любых A, B и C. (Указание: сложение по модулю 2 ассоциативно.)

8. Докажите, что $(A_1\cap\ldots\cap A_n)\triangle(B_1\cap\ldots\cap B_n)\subset(A_1\triangle B_1)\cup\ldots\cup(A_n\triangle B_n)$ для любых множеств $A_1,\ldots,A_n$ и $B_1,\ldots,B_n$.

9. Докажите, что если какое-то равенство (содержащее переменные для множеств и операции $\cap$, $\cup$, $\setminus$) неверно, то можно найти контрпример к нему, в котором множества пусты или состоят из одного элемента.

10. Сколько различных выражений для множеств можно составить из переменных A и B с помощью (многократно используемых) операций пересечения, объединения и разности?