Введение в Структурную Лингвистику

Лекция 6
26.11.2004

5 Кванторные слова

5.1 Кванторы в языке первого порядка

→ В прошлый раз мы поняли, что индивидные константы — имена конкретных предметов, таких, которые можно предъявить в единственном экземпляре, — например, *ректор МГУ*, *президент России*, *Петя*, *Ваня*, *Сократ* и другие. Для таких выражений, как *все*, *слушатель семинара*, *каждый слушатель семинара*, *ни один студент* и проч. индивидные константы не годятся. Невозможно предъявить в единственном экземпляре предмет, имя которого, например, — *каждый студент*. Для интерпретации предложений с такими словами мы использовали кванторы. Мы также изучили некоторую часть семантики кванторов — в том числе вопрос о сфере действия квантора. Так, например, предложение английского языка (1) имеет две разные интерпретации.

(1) Every woman loves someone.
(2) $\forall x \exists y$ [**woman** (x) $\rightarrow$ **love** (x, y)]
(3) $\exists y \forall x$ [**woman** (x) $\rightarrow$ **love** (x, y)]

В интерпретации (2) указано, что для каждой женщины существует индивид, которого она любит. Эти индивиды могут быть для всех женщин разные, некоторые из них могут совпадать. В (3) же утверждается, что существует по крайней мере один такой индивид, которого любят все женщины.

Легко заметить, что и индивидные константы, и те связанные индивидные переменные, которые мы до сих пор обсуждали, с синтаксической точки зрения являются именными группами. Индивидные переменные, связанные квантором, выражаются в том числе **кванторными словами**. Кванторными словами будем называть выражения типа *всякий*, *некоторые*, *ни один*, *по крайней мере один* и др. Также хотелось бы считать кванторными словами такие выражения, как *по крайней мере три*, *не больше десяти*, *ровно пятнадцать*. На том языке, который мы ввели, предложения с такими выражениями записать невозможно. Поэтому расширим этот язык новыми символами и рассмотрим теорию, которая будет сообщать, при каких условиях истинны высказывания, содержащие любое кванторное слово. Язык, которым мы будем пользоваться, уже будет **языком второго порядка**. Теория, которую мы рассмотрим, называется **теорией обобщенных кванторов**.

5.2 Язык второго порядка и теория обобщенных кванторов

До сих пор мы рассматривали имена предметов (*ректор МГУ, президент России, Петя*, *Ваня*, *Сократ*) как индивидные константы и рассматривали множества, к которым эта константа принадлежит. Эти множества мы называли одноместными предикатами. Если было известно, что **спать** (*Вася*), это означало, что индивид с именем Вася принадлежит множеству всех спящих индивидов и ничего больше.

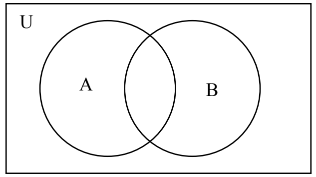
Теперь усложним эти рассуждения. Пусть глагольный предикат так и останется множеством индивидов. Тогда каждый индивид можно рассматривать как множество всех свойств, которыми он обладает. Каждое из свойств — это предикат, т. е. тоже является множеством — множеством тех индивидов, которые обладают этим свойством.

Обозначим множества индивидов, которые обладают свойством танцевать (на которых истинен предикат **танцевать**) так: $[\![$**танцевать**$]\!]$, а множество всех свойств студента запишем так: $[\![$**студент**$]\!]$. Тогда предложение *Студенты танцуют* означает, что элементы множества $[\![$**танцевать**$]\!]$ формируют одно из свойств студентов, значит, множество $[\![$**танцевать**$]\!]$ является элементом множества множеств $[\![$**студент**$]\!]$. Смысл предложения *Студенты танцуют* тогда можно записать так:

$$[\![\textbf{танцевать}]\!] \in [\![\textbf{студент}]\!]$$

Назовем множество $[\![$**танцевать**$]\!]$ **экстенсионалом** глагола *танцевать*, а множество множеств $[\![$**студент**$]\!]$ — **экстенсионалом** имени *студент*.

Теперь введем множество U, которое состоит из всех мыслимых индивидов. Будем называть это множество **универсумом**. Рассмотрим подмножества A и B этого множества. A и B будут тогда предикатами первого порядка (они состоят только из индивидов, а не из множеств). Такие предикаты — это свойства индивидов (например, **спать**, **гулять**, **студент** и проч.)



Обратимся к приведенным диаграммам Венна. Будем говорить, что A и B являются подмножествами U, а писать так: $A \subseteq U$, $B \subseteq U$. Пересечение A и B обозначим $A \cap B$, а объединение A и B — $A \cup B$. То множество, которое является максимальным подмножеством A, но не является подмножеством B, назовем дополнением A и будем обозначать так: A–B. Запись $a \in A$ означает, что индивид a принадлежит множеству A — иными словами, индивид a обладает свойством A.

Как мы уже выяснили, принадлежность индивида a к множеству A — это то же самое, что истинность предиката **A** на этом индивиде. Поэтому теперь будем считать записи **A** (a) и $a \in A$ эквивалентными.

Множество множеств K, которое состоит из множества A и множества B, будем записывать так: K = {A, B}. Множество K — это экстенсионал той именной группы, которая обозначает индвидов, обладающих свойствами A и B и не обладающих больше никакими свойствами.

Про экстенсионалы необходимо знать не только из чего они состоят, а также количество элементов в каждом из них. Это количество будем называть **мощностью экстенсионала**, или **кардинальным числом** экстенсионала, а обозначать будем так: #(A).

Например, если известно, что гуляющих на свете всего полтора миллиарда (т. е. количество индивидов, на которых выполняется предикат **гулять**), будем писать так: #(**гулять**) = 1 500 000 000.

Пусть теперь A — экстенсионал некоторого имени нарицательного N — ср. (4). Значит, A — это множество множеств.

(4) $A = [\![N]\!]$

Тогда именные группы с вершиной N, в том числе и содержащие кванторные слова, можно интерпретировать как множества, которые задаются так:

(5) $[\![\text{Петя}]\!] = \{X \subseteq U \mid p \in X\}$

В именной группе *Петя* нет нарицательного имени N, и именная группа *Петя* обозначает ровно одного индивида. Тем не менее, будем считать, что экстенсионал и именной группы *Петя* — множество таких множеств X из универсума U, каждое из которых задает свойство, которым обладает Петя. Если эти свойства мы будем пересекать между собой, в тот момент, когда мы пересечем их все до единого, в пересечении останется ровно один индивид — Петя.

(6) $[\![\text{все N}]\!] = \{X \subseteq U \mid A \subseteq X\}$

Аналогично, (6) означает множество множеств (свойств) из универсума U, каждое из которых имеет имя X, и экстенсионал A имени нарицательного N целиком входит в каждое из этих множеств X. Это означает, что какого N ни возьми, он будет принадлежать каждому из множеств X. Такая интерпретация эквивалентна интерпретации с квантором всеобщности в языке первого порядка. Аналогично строится семантика для других именных групп с кванторными словами.

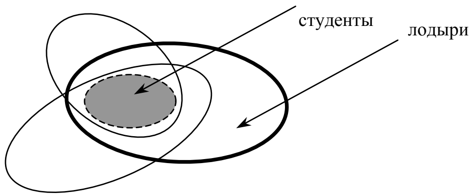
(7) $[\![\text{некоторые N}]\!] = \{X \subseteq U \mid X \cap A \neq \varnothing\}$
(8) $[\![\text{ни один N}]\!] = \{X \subseteq U \mid X \cap A = \varnothing\}$
(9) $[\![\text{(по крайней мере два) N-ы}]\!] = \{X \subseteq U \mid \#(X \cap A) \geq 2\}$
(10) $[\![\text{большинство N-ов}]\!] = \{X \subseteq U \mid \#(X \cap A) > ½\, \#(A)\} = \{X \subseteq U \mid \#(X \cap A) > \#(X - A)\}$

Именные группы из (4–10) будем называть **обобщенными кванторами**. Множества множеств, которые задаются этими именными группами, будем называть экстенсионалами обобщенных кванторов.
Характеристическое свойство обобщенного квантора состоит в следующем. Предложение, состоящее из обобщенного квантора и глагольной группы истинно тогда и только тогда, когда экстенсионал глагола (множество индивидов) является элементом экстенсионала обобщенного квантора (множества множеств индивидов).

Теперь рассмотрим предложение (11). Ему можно дать интерпретацию в языке первого порядка.

(11) Все студенты — лодыри.
$\forall x$ [**студент** (x) $\rightarrow$ **лодырь** (x)]

Высказывание (11) истинно тогда и только тогда, когда множество индивидов ⟦**лодырь**⟧ является элементом множества множеств ⟦**все студенты**⟧. Приняв во внимание (6), можно заключить, что множество ⟦**лодырь**⟧ является таким множеством, подмножеством которого является ⟦**студент**⟧. Это действительно так. В (11) утверждается, что все студенты суть лодыри, но ничего не утверждается о том, являются ли все лодыри студентами. Для ясности изобразим смысл (11) при помощи диаграмм Венна.



Тогда запишем смысл (11) так:

⟦Все студенты — лодыри⟧ = 1, титтк $\{x \in X \mid$ **лодырь** $(x)\} \in \{X \subseteq U \mid$ ⟦**студент**⟧ $\subseteq X\}$

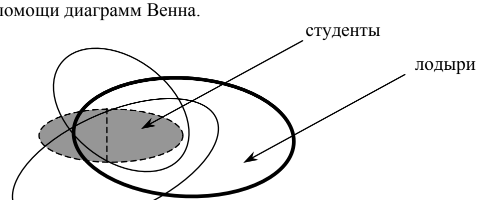
Теперь рассмотрим высказывание, которому невозможно дать интерпретацию на языке первого порядка.

(12) Большинство студентов — лодыри.

Будем рассуждать так же, как в (11). Высказывание (12) истинно тогда и только тогда, когда ⟦**лодыри**⟧ $\in$ ⟦**большинство студентов**⟧. Тогда аналогично предыдущему, получаем следующую интерпретацию для (12) на языке второго порядка:

⟦Большинство студентов — лодыри⟧ = 1, титтк
$\{x \in X \mid$ **лодырь** $(x)\} \in \{X \subseteq U \mid \#(X \cap$ ⟦студент⟧$) > ½\ \#($⟦студент⟧$)\}$

Изобразим это при помощи диаграмм Венна.



Схематично разделим множество студентов пополам — так, чтобы обе части получились **равномощными**, т. е. содержали бы одинаковое количество элементов. Это не всегда можно сделать: если мощность множества — нечетное число, тогда поступим так: мысленно извлечем из всего множества один элемент, разделим новое множество пополам, а затем поместим этот элемент в одну из получившихся частей. Как видно из диаграмм, на пересечении множеств всех лодырей и всех студентов оказывается часть множества студентов, большая по мощности любой из половин всего множества студентов.

В (5–10) мы получили интерпретацию именных групп, которые содержат кванторные слова. Как получить семантику кванторных слов?
Можно рассудить так: кванторное слово — это двухместное отношение (= двухместный предикат) между экстенсионалом глагольной группы и экстенсионалом именной группы.

Тогда чтобы выяснить семантику кванторного слова (= дать ему интерпретацию), нужно выяснить условия истинности соответствующего ему двухместного отношения. Пусть буквой A будет по-прежнему обозначен экстенсионал имени N (A тогда — множество индивидов), а буквой B обозначим экстенсионал вершинного предиката. Тогда интерпретация кванторных слов следующая:

(13) ⟦**все** (A, B)⟧ = 1 титтк $A \subseteq B$
(14) ⟦**некоторые** (A, B)⟧ = 1 титтк $A \cap B \neq 0$
(15) ⟦**ни_один** (A, B)⟧ = 1 титтк $A \cap B = 0$
(16) ⟦**по_крайней_мере_пять** (A, B)⟧ титтк $\#(A \cap B) \geq 5$
(17) ⟦**большинство** (A, B)⟧ титтк $\#(A \cap B) > \#(A - B)$
(18) ⟦**половина** (A, B)⟧ титтк $\#(A \cap B) = \#(A - B)$
(19) ⟦**многие** (A, B)⟧ титтк $\#(A \cap B) > m/n\ \#(A)$, где $n > m$ и $n \neq 0$

В (19) *m* и *n* — натуральные числа. Значения этих переменных зависят от прагматических факторов: от конкретной ситуации и конкретных носителей языка.

Теперь мы поняли, как получить интерпретацию для всякого кванторного слова в языке второго порядка. Зачем нужно много кванторных слов, а не одно? Для того, чтобы можно было производить разные операции с экстенсионалами именных и глагольных групп. Чем отличаются эти операции? Чтобы ответить на этот вопрос, нужно заняться параметризацией семантики кванторных слов — т. е. понять, по каким параметрам могут варьировать интерпретации кванторных слов. Эти параметры назовем **свойства обобщенных квантора**.

5.3 Свойства обобщенных кванторов

Все свойства обобщенных кванторов нам рассмотреть не удастся. В порядке иллюстрации рассмотрим три свойства обобщенных кванторов — **консервативность**, **расширяемость** и **монотонность**.

5.3.1 Консервативность

Рассмотрим эквиваленции (20–22).

(20) Все дети плачут. $\leftrightarrow$ Все дети являются детьми, которые плачут.
(21) Некоторые люди бегают по утрам. $\leftrightarrow$ Некоторые люди являются людьми, которые бегают по утрам.
(22) Бегут ровно пять спортсменов. $\leftrightarrow$ Ровно пять спортсменов являются спортсменами, которые бегут.

Они отражает свойство консервативности обобщенных кванторов. Формально это свойство определяется так:

(23) $Q(A, B) \leftrightarrow Q(A, A \cap B)$

В (23) Q — квантор (как двухместное отношение между экстенсионалами именной и глагольной группы), A — экстенсионал имени N, B — экстенсионал глагольной группы. Свойство консервативности сообщает нам, что истинность квантора двух экстенсионалов — это то же самое, что истинность квантора экстенсионала именной группы и пересечения экстенсионалов именной и глагольной групп. Примеры (20–22) подтверждают это.

Все кванторы консервативны. Исключением является слово *только*. Ср. (24), где свойство консервативности не нарушается, и пример (25), не демонстрирующий консервативности.

(24) Все студенты — лодыри. $\leftrightarrow$ Все студенты являются студентами, которые являются лодырями.
(25) Только студенты — лодыри. $\not\leftrightarrow$ Только студенты являются студентами, которые являются лодырями.

Если (24) демонстрирует в точности свойство (23), то (25) свойства (23) не демонстрирует, а демонстрирует свойство (26).

(26) $Q(A, B) \leftrightarrow Q(B, B \cap A)$

Подтверждением этому служит (27):

(27) Только студенты — лодыри. $\leftrightarrow$ Все лодыри — студенты. $\leftrightarrow$ [по (20 / 23)]
$\leftrightarrow$ Все лодыри — это лодыри, которые являются студентами.

(27') **только** (⟦**студент**⟧, ⟦**лодырь**⟧) $\leftrightarrow$ **только** (⟦**лодырь**⟧, ⟦**лодырь**⟧ $\cap$ ⟦**студент**⟧)

Таким же исключением является квантор *много* (проверьте самостоятельно). Хотелось бы считать свойство консервативности кванторов универсальным (верным для любого квантора). Самым простым решением является не считать *только* и *много* кванторами. Более сложные решения рассматривать не будем.

5.3.2 Расширяемость

Рассмотрим (28).

(28) Многие немцы не понимают английский язык.

Когда можно сказать (28)? Например, при обсуждении какого-нибудь решения Европарламента, которое требуется составить также по-немецки, т. к. истинно (28). При обсуждении в Европарламенте множество всех мыслимых индивидов U — все европейцы. При таком U (28) истинно. Но (28) истинно и при обсуждении, скажем, некоторого решения ООН, когда множество всех мыслимых индивидов U' — жители всего мира, т. е. более мощно, чем U и включает в себя U.

Значит, (28) истинно при неограниченном расширении универсума. В этом и состоит свойство расширяемости квантора *многие*. Все другие кванторы также удовлетворяют этому свойству.

(29) Для любых A, B $\subseteq$ U и для любого U' $\supseteq$ U
Q_U (A, B) $\rightarrow$ $Q_{U'}$ (A, B)

Запись Q_U (A, B) означает истинности квантора Q (A, B) на универсуме U. Заметим, что импликация в обратную сторону неверна. Рассмотрим (30). Если положить, что (30) истинно и если уменьшить универсум до, например, одних баварцев, (30) окажется ложным.

(30) Большинство немцев не говорят по-баварски.

Свойство расширяемости (29) истинно для всех кванторов.

5.3.3 Монотонность

Кванторы ведут себя неодинаково с точки зрения их **монотонности**. Рассмотрим теперь серию импликаций (31–33).

(31) a. Некоторые люди бегают быстро. $\rightarrow$ Некоторые люди бегают.
b. Некоторые люди бегают быстро. $\nleftarrow$ Некоторые люди бегают.

(32) a. Ни один человек не бегает быстро. $\nrightarrow$ Ни один человек не бегает.
b. Ни один человек не бегает быстро. $\leftarrow$ Ни один человек не бегает.

(33) a. Ровно три человека бегают быстро. $\nrightarrow$ Ровно три человека бегают.
b. Ровно три человека бегают быстро. $\nleftarrow$ Ровно три человека бегают.

Будем называть все приведенные в (31–32) кванторы **монотонными справа** (т. к. мы изменяли только глагольную группу — правый элемент кванторного отношения).

- Обобщенный квантор *некоторые N-ы* из (31) будем называть **возрастающим справа**, т. к. его истинность сохраняется при увеличении экстенсионала глагольной группы и не сохраняется при его уменьшении (множество индивидов, которые бегают быстро является собственным подмножеством индивидов, которые вообще бегают). Возрастание квантора справа будем записывать так: mon↑.

- Обобщенный квантор *ни один N* из (32) будем называть **убывающим справа**, т. к. его истинность сохраняется при уменьшении экстенсионала глагольной группы и не сохраняется при его увеличении (множество индивидов, которые не бегают быстро является собственным подмножеством индивидов, которые вообще бегают). Убывание квантора справа будем записывать так: mon↓.

Обобщенный квантор из (32) *ровно k N-ов*, где *k* — натуральное число больше нуля, будем называть **немонотонным справа**, т. к. его истинность не сохраняется ни при увеличении, ни при уменьшении экстенсионала глагольной группы. Немонотонность квантора справа будем записывать так: mon~.

Кванторы бывают и монотонными слева. Для этого нужно уменьшать / увеличивать экстенсионал именной группы. Продемонстрируем монотонность слева на тех же кванторах — ср. (34–36).

(34) a. Некоторые больные студенты пришли. $\rightarrow$ Некоторые студенты пришли.
b. Некоторые больные студенты пришли. $\nleftarrow$ Некоторые студенты пришли.

(35) a. Ни один больной студент не пришел. $\nrightarrow$ Ни один студент не пришел.
b. Ни один больной студент не пришел. $\leftarrow$ Ни один студент не пришел.

(36) a. Ровно три больных студента пришло. $\nrightarrow$ Ровно три студента пришло.
b. Ровно три больных студента пришло. $\nleftarrow$ Ровно три студента пришло.

Поясним, например, (36). В (36a) импликация не имеет места: то, что пришло три больных студента не означает, что пришло ровно три студента — могло прийти еще некоторое количество здоровых. В (36b) импликация также не имеет места: из того, что пришло ровно три студента, вовсе не следует, что они все больные — они могут оказаться все здоровыми.

Монотонность слева для этих кванторов оказалась идентичной монотонности справа. Тогда их монотонность будем записывать так:

некоторые: ↑mon↑
ни один: ↓mon↓
ровно ***k*** ~mon~

Не следуют думать, что монотонность слева и справа всегда одинаковая. Укажем примеры неодинаково монотонных кванторов:

всякий: ↓mon↑
не всякий: ↑mon↓
большинство ~mon↑

Покажем это, например, для квантора *большинство*. В (39) демонстрируется свойство mon↑ этого квантора, а в (40) — свойство ~mon.

(39) a. Большинство студентов курят Яву. $\rightarrow$ Большинство студентов курят.
b. Большинство студентов курят Яву. $\nleftarrow$ Большинство студентов курят.

(40) a. Большинство больных студентов пришло. $\nrightarrow$ Большинство студентов пришло.
b. Большинство больных студентов пришло. $\nleftarrow$ Большинство студентов пришло.

Докажите самостоятельно свойства монотонности для кванторов **всякий** и **не всякий**.

В заключение дадим формальное определение монотонности:

(i) Квантор Q монотонно возрастает слева (↑mon), титтк
для любых $A_1 \subseteq A_2 \subseteq$ U и B $\subseteq$ U: Q (A_1, B) $\rightarrow$ Q (A_2, B);

(ii) Квантор Q монотонно убывает слева (↓mon), титтк
для любых $A_1 \subseteq A_2 \subseteq$ U и B $\subseteq$ U: Q (A_2, B) $\rightarrow$ Q (A_1, B);

(iii) Квантор Q монотонно возрастает справа (mon↑), титтк
для любых A $\subseteq$ U и $B_1 \subseteq B_2 \subseteq$ U: Q (A, B_1) $\rightarrow$ Q (A, B_2);

(iv) Квантор Q монотонно убывает справа (mon↓), титтк
для любых A $\subseteq$ U и $B_1 \subseteq B_2 \subseteq$ U: Q (A, B_2) $\rightarrow$ Q (A, B_1);

(v) Квантор Q монотонно не возрастает и не убывает слева (~mon), титтк
ложно (i) и (ii);

(vi) Квантор Q монотонно убывает слева (mon~), титтк
ложно (iii) и (iv).